Durée : 04 heures

Exercice 01:(03pts)

⇨ Pour tout $x, y \in]0;1[$, On pose : $x * y = \dfrac{2xy}{(1-x)(1-y)+2xy}$.

0,5 1)- Montrer que $*$ est une loi de composition interne sur $]0;1[$.

2)- Pour tout $x \in]0;1[$, On pose : $f(x) = \dfrac{e^x}{2+e^x}$.

0,75 a)- Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(]0;1[,*)$.

0,75 b)- En déduire la structure de $(]0;1[,*)$. (On déterminera l'élément neutre de La loi $*$ et le symétrique de tout $x \in]0;1[$)

3)- On considère l'ensemble $H = \left\{ \dfrac{3^n}{2+3^n} / n \in \mathbb{Z} \right\}$.

0,5 ✓ Montrer que $(H,*)$ est un sous groupe de $(]0;1[,*)$.

4)- Pour tout $x \in]0;1[$, On pose : $x^{(n)} = \underbrace{x * x * ... * x}_{n\ fois}$ Où $n \in \mathbb{N}^*$.

0,5 ✓ Exprimer $x^{(n)}$ en fonction de x et n, puis déterminer son symétrique dans $(]0;1[,*)$.

Exercice 02:(3,5pts)

⇨ On considère dans $\mathbb{N}$, l'équation: $(E): 10^x \equiv 2[19]$.

0,5 1)- a)- Montrer que : $10^{18} \equiv 1[19]$.

0,5 b)- En déduire que : $10^{17} \equiv 2[19]$ (On pourra utiliser le théorème de Gauss).

2)- Soit $x \in \mathbb{N}$ une solution de l'équation (E) . On pose : $d = 18 \wedge (x+1)$.

0,25 a)- Vérifier que : $10^{x+1} \equiv 1[19]$.

0,5 b)- Montrer que : $10^d \equiv 1[19]$.

0,75 c)- Justifier que : $d = 18$, puis en déduire que : $x \equiv 17[18]$.

3)- Soit $x \in \mathbb{N}$ tels que : $x \equiv 17[18]$.

0,5 ✓ Montrer que : $10^x \equiv 2[19]$ (On pourra utiliser 1)- b)-).

0,5 4)- Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E) en justifiant la réponse .

Exercice 03:(3,5pts)

⇨ On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation :

$$(E):\frac{1}{m}z^2+(1-3i)z-4m=0 \text{ Où } m\in\mathbb{C}^*.$$

0,25 — 1)- a)- Déterminer les racines carrés du nombre complexe $a=8-6i$.

0,5 — b)- Déterminer les solutions z_1 et z_2 de l'équation (E) tels que : $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{m}\right)<0$.

0,5 — c)- On pose : $\theta\equiv\arg(m)[2\pi]$. Calculer $\arg(z_1)$ et $\arg(z_2)$ en fonction de θ.

2)- Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère Les points M_1, M_2, M et D d'affixes respectifs : z_1, z_2, m et $z_D=1+3i$.

0,25 — a)- Montrer que OM_1M_2 est un triangle rectangle en O.

0,5 — b)- Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ tels que O, D et M soient alignés.

0,5 — c)- Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ tels que ODM soit un triangle Rectangle en O.

3)- Le point N_1 est l'image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Et le point N_2 est l'image de M_2 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

0,5 — a)- Montrer que les points M_1, N_1, M_2 et M_2 sont cocycliques.

0,5 — b)- Déterminer en fonction de m le rayon et l'affixe du centre du cercle circonscrit Aux quadrilatère formé par ces quatre points.

Problème:(10pts)

3,25pts

I - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f(0)=1 \text{ et } \left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right), f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x}.$$

0,5 — 1)- a)- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

0,5 — b)- Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right); e^{-x}(x+1)-1<0$, puis en déduire la monotonie De sur $\mathbb{R}^+$.

Durée : 04 heures

2)- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et F_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right); F_n\left(x\right) = \frac{e^{-x}}{n!} . \int_0^x t^n e^t \, dt .$$

0,5 a)- Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right); F_1\left(x\right) = x - 1 + e^{-x}$.

0,75 b)- Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right); F_{n+1}\left(x\right) = \dfrac{x^{n+1}}{\left(n+1\right)!} - F_n\left(x\right)$.

0,5 c)- En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$F_2\left(x\right) = \frac{x^2}{2} - x + 1 - e^{-x} \text{ et } F_3\left(x\right) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + x - 1 + e^{-x} .$$

0,5 3)- Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right); -\dfrac{x}{2} \le f\left(x\right) - 1 \le -\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6}$.

2,75pts

II -Pour tout $n \in \mathbb{N}$, On pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^{nx}\left(1+e^x\right)} dx$.

0,5 1)- a)- Calculer l'intégrale u_0.

0,5 b)- Montrer que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis en déduire qu'elle converge.

0,5 c)- Montrer que : $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right); u_n + u_{n+1} = f\left(n\right)$, puis en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2)- Pour tout $n \ge 2$, On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(-1\right)^k . f\left(k\right)$.

0,75 a)- Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right); \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \left(-1\right)^k e^{-kx} = \frac{\left(-1\right)^{n-1} e^x}{e^{nx}\left(1+e^x\right)} - \frac{1}{1+e^x}$.

0,5 b)- En déduire que : $\left(\forall n \ge 2\right); S_n = \left(-1\right)^{n-1} . u_n + \ln\left(\dfrac{1+e}{e}\right)$. Puis en déduire

Que la suite $\left(S_n\right)_{n\ge2}$ est convergente en précisant sa limite .

04pts

III - On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$F\left(0\right) = 1 \text{ et } \left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right); F\left(x\right) = \frac{1}{x} . \int_0^x f\left(t\right) dt .$$

0,5 1)- a)- Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}\right); 1 - \dfrac{x}{4} \le F\left(x\right) \le 1 - \dfrac{x}{4} + \dfrac{x^2}{18}$.

0,75 b)- En déduire que F est continue et dérivable à droite en $x_0 = 0$. Puis donner

L'équation de la demi tangente à droite en $x_0 = 0$.

Durée : 04 heures

0,5	2)- a)- Montrer que : $\left(\forall x\in[1;+\infty[\right);0\le F(x)\le \frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}.\int_1^x f(t)\,dt$.
0,5	b)- En déduire $\lim_{x\to+\infty} F(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat .
0,75	3)- a)- Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que : $$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right);F'(x)=\frac{f(x)-F(x)}{x}.$$
0,5	b)- Montrer que F est décroissante sur $\mathbb{R}^{+}$ et dresser son tableau de variation .
0,5	4)- Construire la courbe (C_F) dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Fin Du Sujet.